

Aspekte der Luftbewegung in der atmosphärischen Grenzschicht

Ines Höschel

Einleitung

Der Anfang

- Polarexpedition unter Nansen
- Beobachtung: von Windrichtung abweichende Eisbergdrift
- Erklärung: Wirkung der Erdrotation
- fehlender mathematischer Nachweis

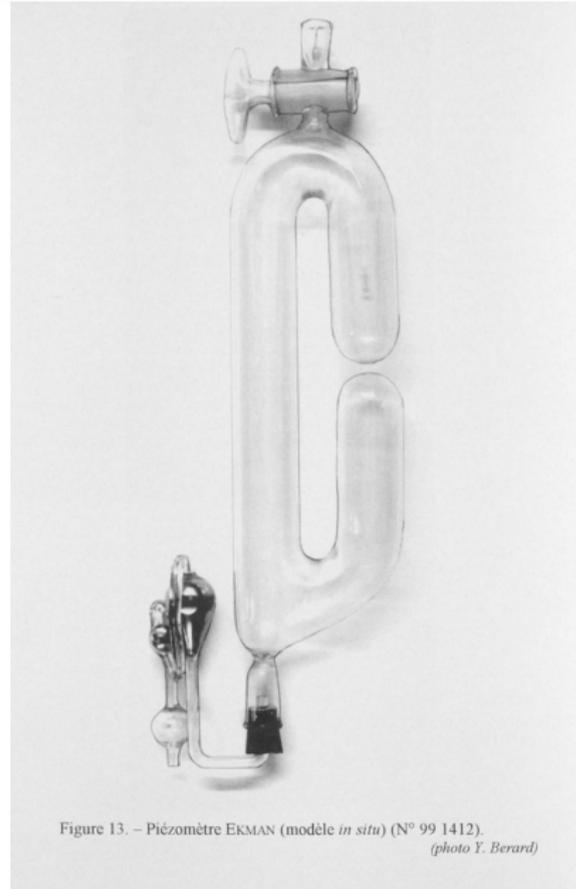


Wer war Vagn Walfrid Ekman



- Geburt am 3. Mai 1874 in Stockholm
- Studium der Physik an der Universität Uppsala
- 1902 Promotion
V. W. Ekman. Om jordrotationens inverkan på vindströmmar i hafvet. Nyt Magazin for Naturvidenskab, 40(1):1-27, 1902.
- Zwei weitere Veröffentlichungen zum Thema
On the influence of the earths rotation on ocean-currents. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, 2(11):1-52, 1905.
Beiträge zur Theorie der Meeresströmungen. Ann. d. Hydrogr., 34:50pp., 1906.

- Teilnahme an Forschungsreisen
- Konstruktion verschiedener ozeanographischer Meßgeräte
- Hier: Piezometer



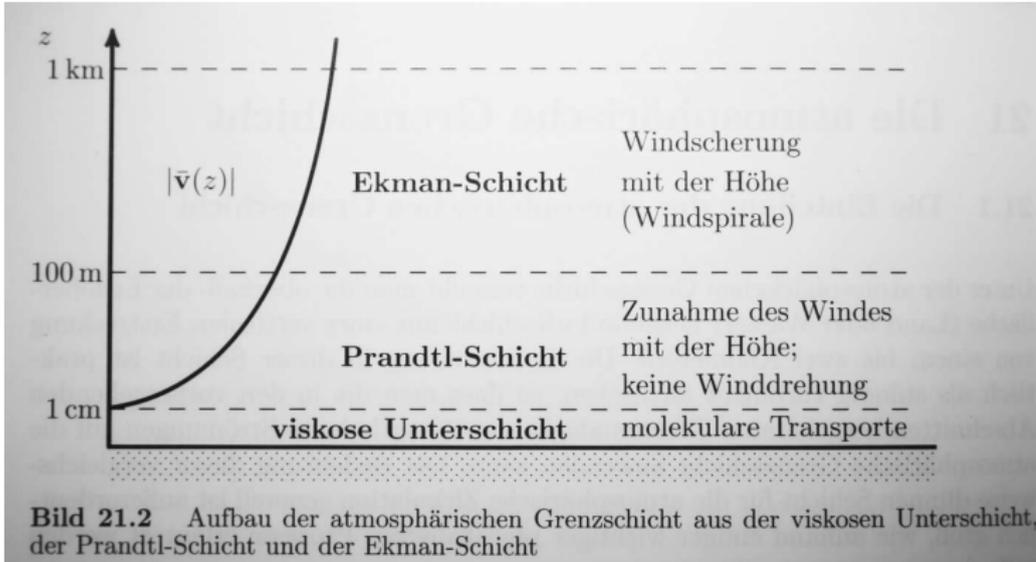
Vagn Walfrid Ekman



- 1903-1909 in Oslo am Internationalen Laboratorium für ozeanographische Forschungen
 - 1910 -1939 Professor für Mechanik und mathematische Physik an der Universität Lund
 - Lehrbuch der Mechanik
-
- Mitglied der Königlichen Schwedischen Akademie der Wissenschaften seit 1935
 - Tod am 9. März 1954 in Gostad in Schweden,

Gleichung

Aufbau der Grenzschicht



Aufbau der Grenzschicht

viskose Unterschicht

- keine Turbulenz
- Transport von Wärme und Feuchte durch molekulare Vorgänge

Prandtl-Schicht Annahmen:

- höhenkonstante turbulente Flüsse
- kein Corioliseffekt

Ekman-Schicht

- vertikale turbulente Flüsse nehmen mit der Höhe ab
- Corioliseffekt muss beachtet werden

Die Ekman-schicht ist dadurch definiert, dass $\frac{\partial \tau}{\partial z} \neq 0$

Ausgangsgleichung:

gewogen gemittelte Bewegungsgleichung:

$$\bar{\rho} \frac{\hat{d}\hat{\mathbf{v}}}{dt} = -2\omega \times \bar{\rho} \hat{\mathbf{v}} - \bar{\rho} \nabla \Phi + \nabla \cdot [\bar{\mathbf{T}} - \overline{\rho \mathbf{v}'' \mathbf{v}''}]$$

$$\frac{\hat{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla$$

$$\tau := -\overline{\rho \mathbf{v}'_h \mathbf{v}'_z} \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} \approx -\nabla \bar{p}$$

Annahme: horizontale Homogenität des Windes und der gemittelten Variablen

Boussinesq-Approximation:

Setze $\rho' = 0$, also $\hat{a} = \bar{a}$ und $a' = a''$ in allen Termen, die für den Auftrieb nicht relevant sind.

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}_h}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_h \bar{p} - f \mathbb{k} \times \bar{\mathbf{v}}_h + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z}$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}_h}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_h \bar{p} - f \mathbb{k} \times \bar{\mathbf{v}}_h + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z}$$

- Definition des geostrophischen Windes

$$f \mathbb{k} \times \mathbf{v}_g = -\frac{1}{\rho} \nabla_h p$$

- Gradient-Ansatz

$$\tau = \rho K_M \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z}$$

- Konstante Dichte

$$\Rightarrow \frac{d\bar{\mathbf{v}}_h}{dt} = -f \mathbb{k} \times (\bar{\mathbf{v}}_h - \mathbf{v}_g) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_M \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z} \right)$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}_h}{dt} = -f \mathbb{k} \times (\bar{\mathbf{v}}_h - \mathbf{v}_g) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_M \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z} \right)$$

- Beschleunigungsfreiheit
- Barotropie
- $K_M = \text{const.}$

$$\frac{\partial^2 (\bar{\mathbf{v}}_h - \mathbf{v}_g)}{\partial z^2} = \frac{f}{K_M} \mathbb{k} \times (\bar{\mathbf{v}}_h - \mathbf{v}_g)$$

Gewöhnliche Vektordifferentialgleichung 2.Ordnung für den Ablenkungsvektor des Windes in der Ekman'schen Schicht vom geostrophischen Wind.

Einleitung
○○○○

Gleichung
○○○○○

Lösung
○○○○○○○

Zusammenfassung
○○

Quellen
○

Lösung

$$\frac{\partial^2(\bar{\mathbf{v}}_h - \mathbf{v}_g)}{\partial z^2} = \frac{f}{K_M} \mathbb{k} \times (\bar{\mathbf{v}}_h - \mathbf{v}_g)$$

Definieren komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene:

$$\zeta = \bar{\mathbf{v}}_h - \mathbf{v}_g$$

$$\eta = \mathbf{v}_g$$

erhalten komplexe Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = \frac{f}{K_M} \mathbf{i} \zeta$$

$$\frac{\partial^2(\bar{\mathbf{v}}_h - \mathbf{v}_g)}{\partial z^2} = \frac{f}{K_M} \mathbb{k} \times (\bar{\mathbf{v}}_h - \mathbf{v}_g)$$

Definieren komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene:

$$\zeta = \bar{\mathbf{v}}_h - \mathbf{v}_g$$

$$\eta = \mathbf{v}_g$$

erhalten komplexe Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = \frac{f}{K_M} \mathbf{i} \zeta =: 2a^2 \mathbf{i} \zeta$$

mit $a = \sqrt{\frac{f}{2K_M}}$

Der **Ansatz** $\zeta = A e^{bz}$ ist eine Lösung der Gleichung für $b^2 = 2a^2 \mathbf{i} \Leftrightarrow b = \pm a(1 + \mathbf{i})$.

allgemeine Lösung:

$$\zeta = A_1 e^{a(1+i)z} + A_2 e^{-a(1+i)z}$$

Randbedingungen:

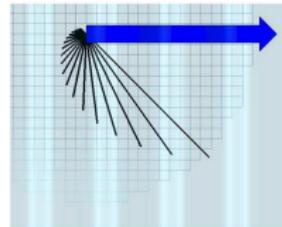
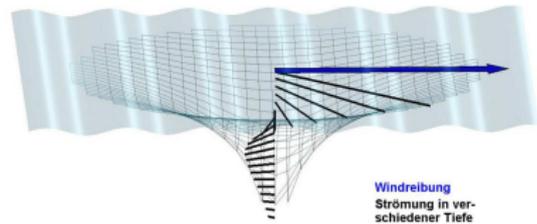
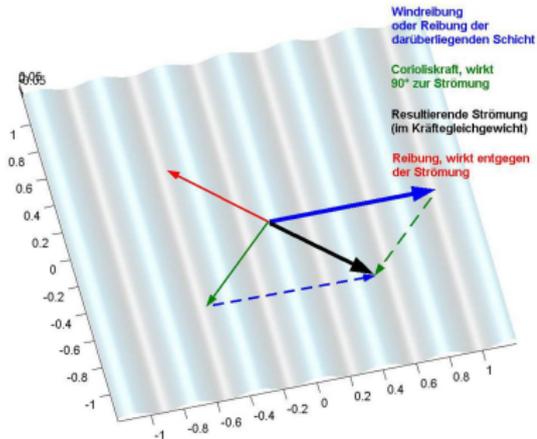
- Am Boden verschwindet der horizontale Wind:
 $z = 0: \bar{\mathbf{v}}_h = 0 \quad (\zeta = -\eta) \Rightarrow -\eta = A_1 + A_2$
- In der freien Atmosphäre weht der Wind isobarenparallel:
 $z \rightarrow \infty: \bar{\mathbf{v}}_h = \mathbf{v}_g \quad (\zeta = 0) \Rightarrow 0 = A_1$

Lösung: $\zeta = -\eta e^{-(1+i)az}$

bzw. im kartesischen System:

$$\bar{\mathbf{v}}_h(z) = \mathbf{v}_g - \mathbf{v}_g e^{-(1+i)az}$$

Graphische Darstellung



Die Höhe der atmosphärischen Grenzschicht z_G

Definition: Wind weht erstmals in Richtung des geostrophischen Windes: $\bar{\mathbf{v}}_h(z_G) \parallel \mathbf{v}_g$.

$$\bar{\mathbf{v}}_h(z) = \mathbf{v}_g(1 - e^{-az} \cos az) + \mathbb{k} \times \mathbf{v}_g e^{-az} \sin az$$

$$\frac{1}{a} = \sqrt{2 \frac{K_M}{f}} - \text{Ekmanlänge}$$

Höhe der atmosphärischen Grenzschicht:

$$z_G = \pi \sqrt{2 \frac{K_M}{f}} = \frac{\pi}{a}$$

Einsetzen üblicher Werte in

$$z_G = \pi \sqrt{2 \frac{K_M}{f}}$$

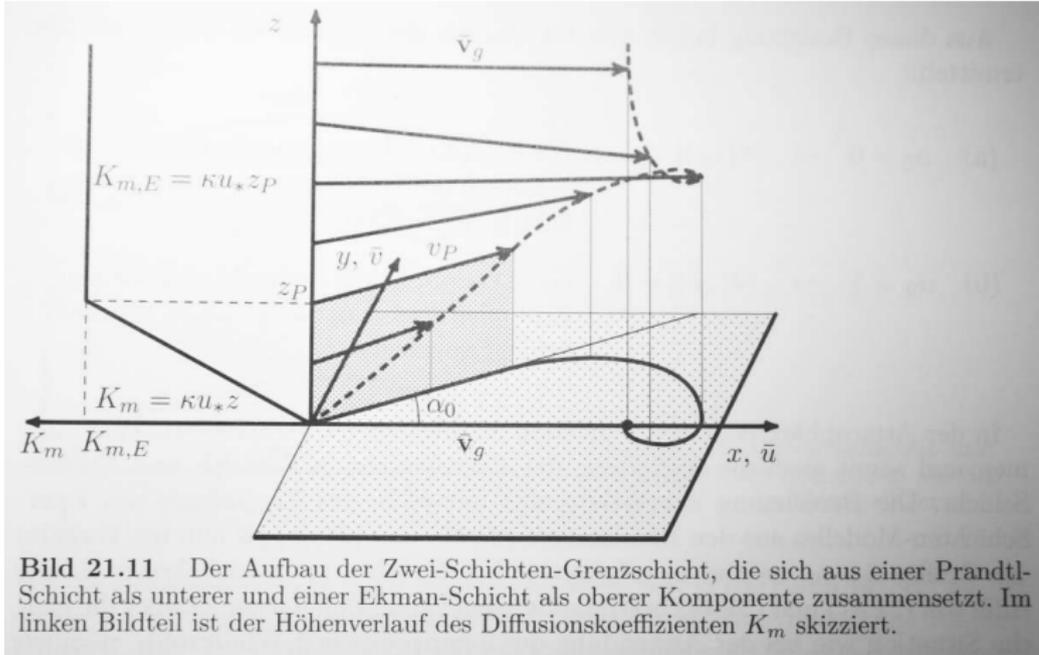
$$K_M = 5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1},$$
$$f = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

⇒ durchschnittliche Höhe der Grenzschicht etwa 1000m.

Die Höhe der atmosphärischen Grenzschicht hängt von der Größe des turbulenten Diffusionskoeffizienten K_M ab.

- südl. Breiten: Kleines f → Höhere Grenzschicht
- Meer: kleinerer K_m als Land → Über Land höhere Grenzschicht

Windprofil der 2-Schichten-Grenzschicht



Einfluss von Bodenrauigkeit und Schichtung

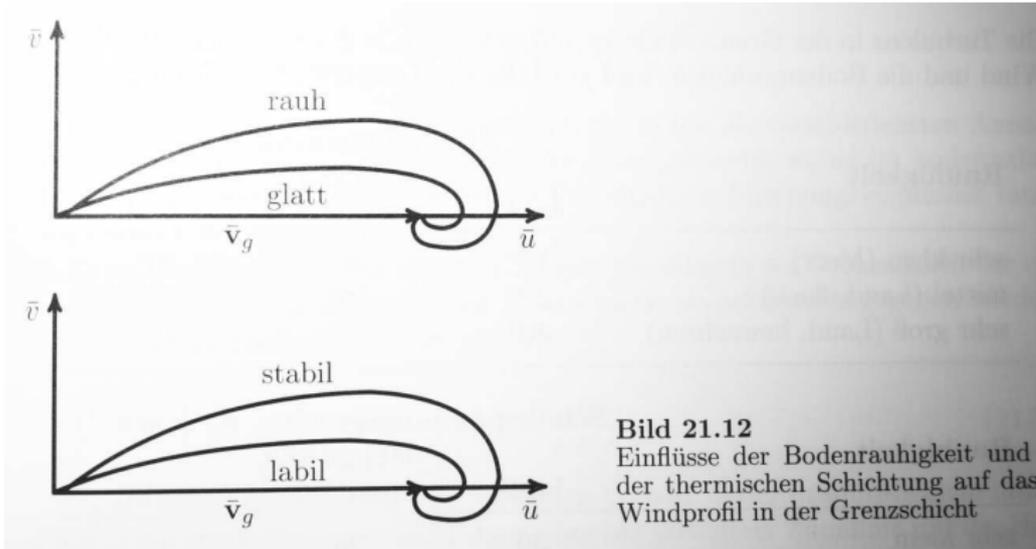


Bild 21.12
Einflüsse der Bodenrauigkeit und
der thermischen Schichtung auf das
Windprofil in der Grenzschicht

Zusammenfassung

Ausgangspunkt: gewogen gemittelte Bewegungsgleichung

Annahmen:

- Horizontalität des Windes
- Horizontale Homogenität der turbulenten Impulsflüsse
- Boussinesq-Approximation
- Beschleunigungsfreiheit
- Barotropie
- Konstante Dichte
- Konstanz des turbulenten Diffusionskoeffizienten



Gleichung: Gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{\partial^2(\bar{\mathbf{v}}_h - \mathbf{v}_g)}{\partial z^2} = \frac{f}{K_M} \mathbb{k} \times (\bar{\mathbf{v}}_h - \mathbf{v}_g)$$

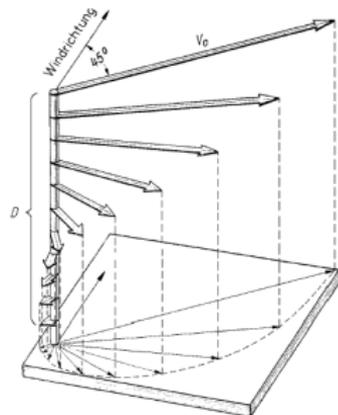
Trick: Lösung im Komplexen

Randbedingungen:

- Verschwinden des horizontalen Windes am Boden
- Isobarenparalleler Wind in der freien Atmosphäre

Ergebnis für atmosphärische Grenzschicht:

$$\bar{\mathbf{v}}_h(z) = \mathbf{v}_g - \mathbf{v}_g e^{-(1+i)az}$$



Quellen

Alastair D. Jenkins, John A. T. Bye

The Rotation of the earth and processes near the air-sea interface

(www.uib.no/People/gbsaj/papers/jenkins-bye-ekman-poster.pdf)

D. Etling,

Theoretische Meteorologie, 2. Aufl., Springer, 2002

G. D. Hess

Parameterisation of the Atmospheric Boundary Layer: A Retrospective Look

(www.bom.gov.au/bmrc/basic/wksp16/papers/Hess.pdf)

H.-J. Lange,

Die Physik des Wetters und des Klimas, Reimer, 2002

<http://de.wikipedia.org/wiki/>

http://no.wikipedia.org/wiki/Vagn_Ekman

Umformungen komplexer Zahlen:

$$(i + 1)^2 = 2i$$

$$\mathbb{k} \times \zeta = i\zeta$$

$$i\zeta = i(a + ib) = -b + ia$$

$$\mathbb{k} \times (a, b, 0) = (-b, a)$$