1. Serie: Theoretische Meteorologie I WS06/07

Die AG Theorie im Internet: http://wekuw.met.fu-berlin.de/Theorie

THEMA: Vektoranalysis im $\mathbb{R}^3$

1. *(6 Punkte)* Berechne

a) $\nabla \times (\alpha \mathbf{a})$ b) $\nabla \cdot (\alpha \mathbf{a})$ c) $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

d) $\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r})$ e) $\nabla \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{r})$ f) $\nabla \cdot (\alpha \mathbf{c} \times \mathbf{r})$

2. *(3 Punkte)* Zeige, dass folgende Gleichungen gelten:

a) $\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\,\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\,\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a})$

b) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$

c) $\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{b} = \mathbf{a}\,(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\,\mathbf{b}$

Dabei bedeuten:

$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$	Nabla-Operator im $\mathbb{R}^3$
$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$	Ortsvektorfeld
$\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x, y, z)$	beliebige Vektorfelder
$\alpha = \alpha(x, y, z)$	Skalarfunktion
$\mathbf{c}$	homogenes Vektorfeld

THEMA: Vektorkalkül

3. *(3 Punkte)* Aus den beiden Gleichungen

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \alpha$$

ist in koordinatenfreier Rechnung (d.h. ohne die Aufspaltung der Vektoren in ihre Koordinatendarstellung) der Vektor **a** zu bestimmen.

4. *(6 Punkte)* In den drei Gleichungen

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sigma$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \tau$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$$

seien die Skalare σ und τ und die Vektoren **b** und **c** bekannt. Es ist der Vektor **a** zu bestimmen. Rechne abermals koordinatenfrei!