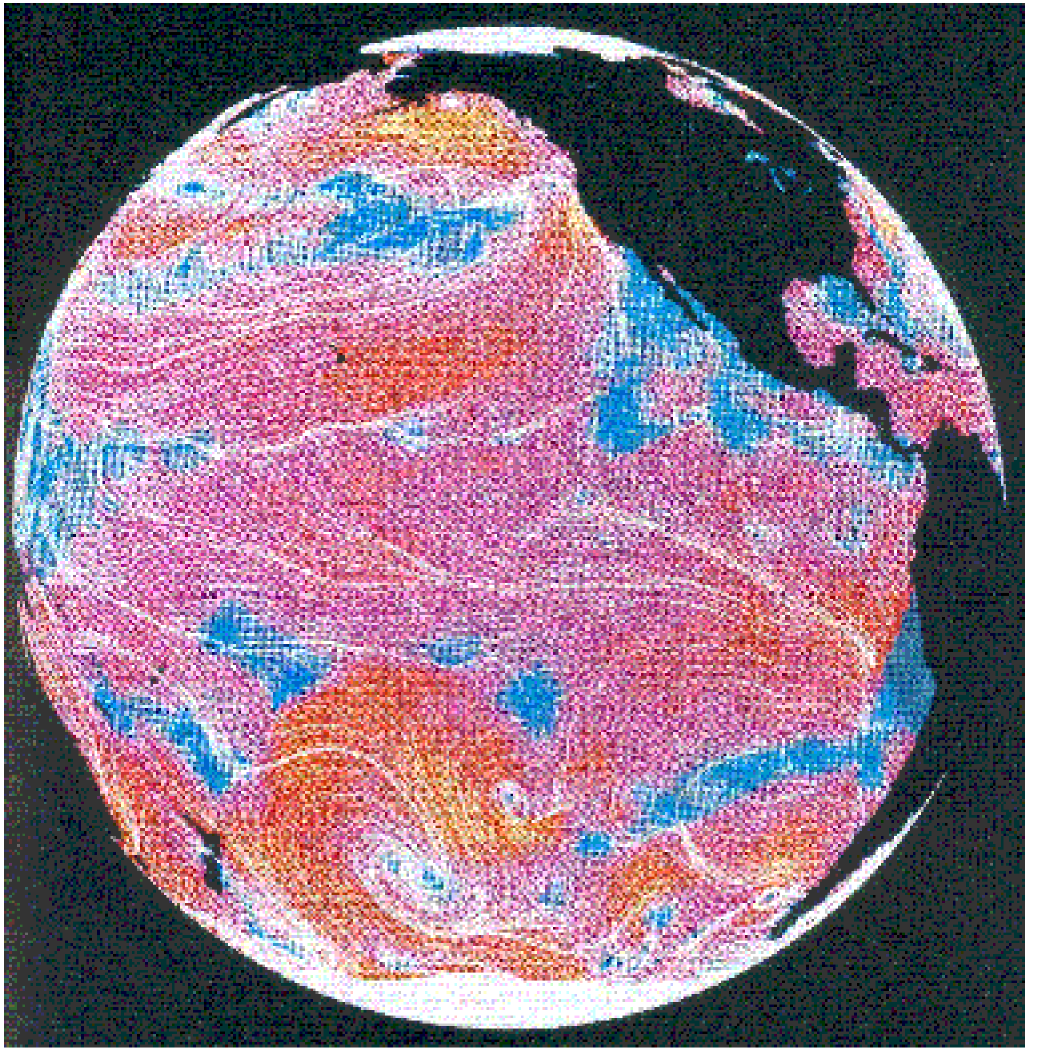
Modul: Abgeleitete Windgrößen (Divergenz, Vorticity)

Lernziel:

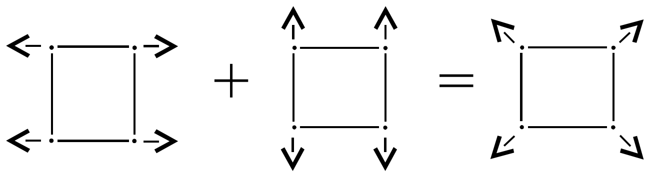
Ableitung und Verständnis der für die großskalige synoptische Dynamik wichtigen räumlichen abgeleiteten Größen des Windfeldes wie Divergenz, Vorticity und Deformation sowie deren kinematische Beziehungen zum Jacobi-Operator.

Keywords: Kinematische Größen
Vorticity
Divergenz
Deformationen
Jacobi-Operator

Wellen und Wirbel in der Atmosphäre

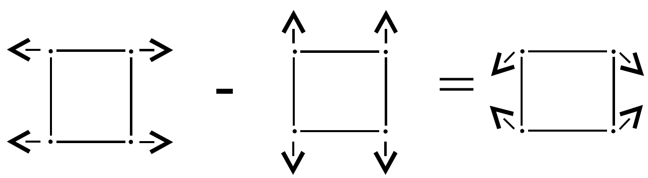


Anschauliche Ableitung der kinematischen Größen



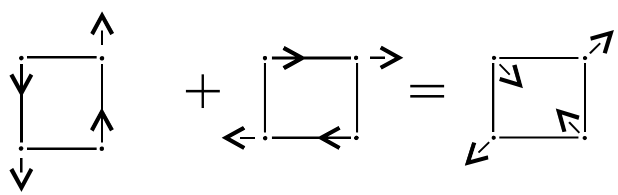
Divergenz

$$D_h = \nabla_h \cdot \boldsymbol{v}_h = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$



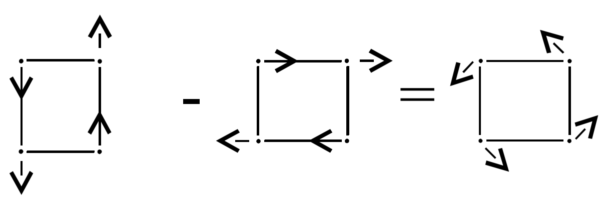
Streckungs-deformation

$$Def_{Str} = \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}$$



Scherungs-deformation

$$Def_{Sch} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}$$



Vorticity

$$\zeta = \boldsymbol{k} \cdot \nabla_h \times \boldsymbol{v}_h = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Vorticity

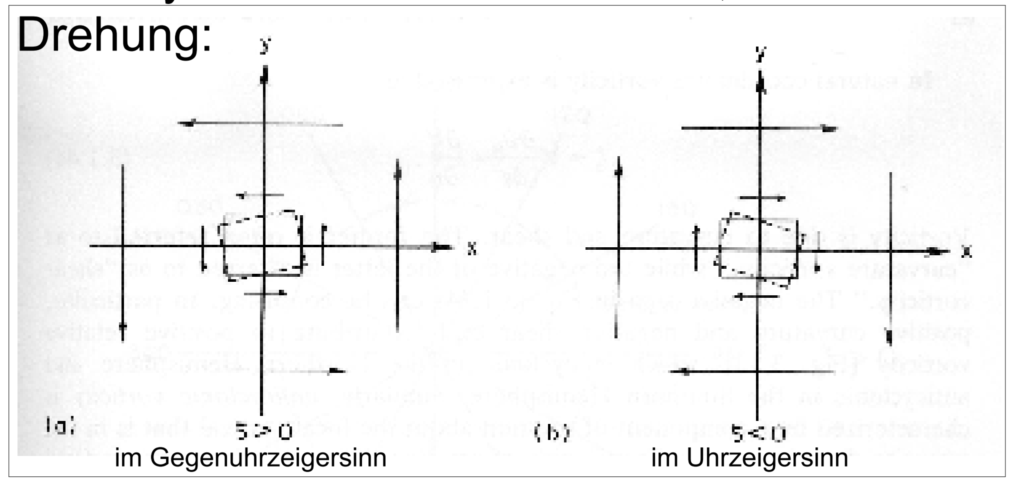
Vorticity in kartesischen Koordinaten:

$$\zeta = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$\zeta > 0$: zyklonale Rotation

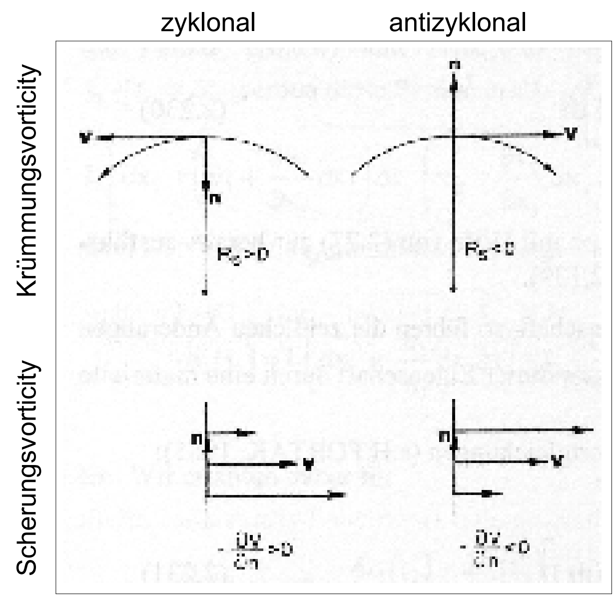
$\zeta < 0$: antizyklonale Rotation

Vorticity ist flächen- und formtreu, beschreibt Drehung:



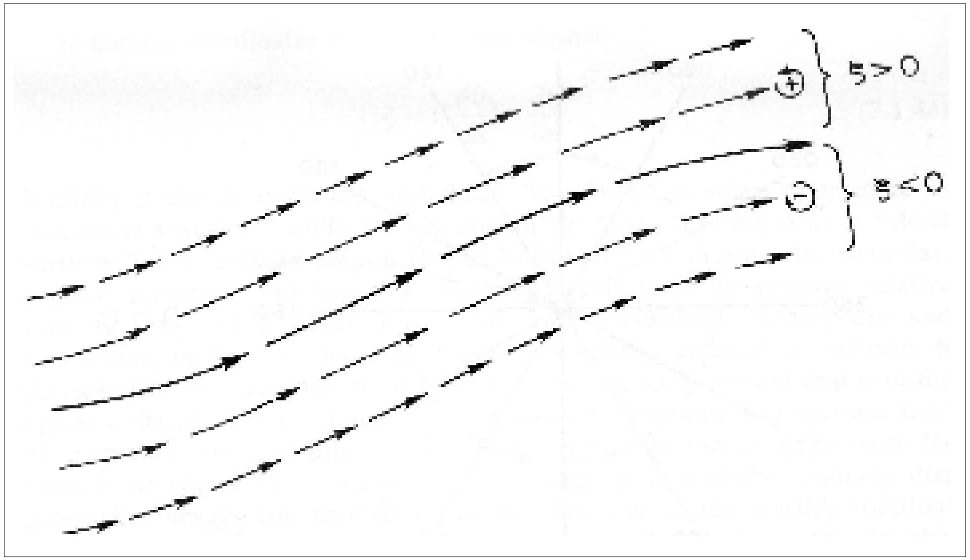
Vorticity in natürlichen Koordinaten:

$$\zeta = \underbrace{-\frac{\partial v_h}{\partial n}}_{Scherungsvorticity} + \underbrace{\frac{v_h}{R}}_{Krümmungsvorticity}$$



Verhältnisse auf der NHK

Vorticity



Scherungsvorticity

positive und negative Scherungs-vorticity nördlich und südlich eines Strahlstroms (auf NHK)

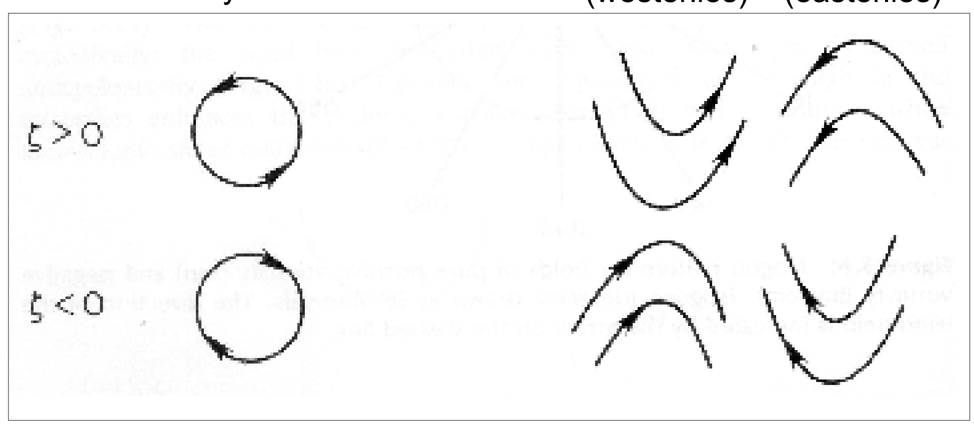
Krümmungsvorticity

(Bezeichnungen für NHK)

Zyklone

Trog (westerlies)

Trog (easterlies)



Antizyklone

Keil (westerlies)

Keil (easterlies)

Divergenz

Divergenz in kartesischen Koordinaten:

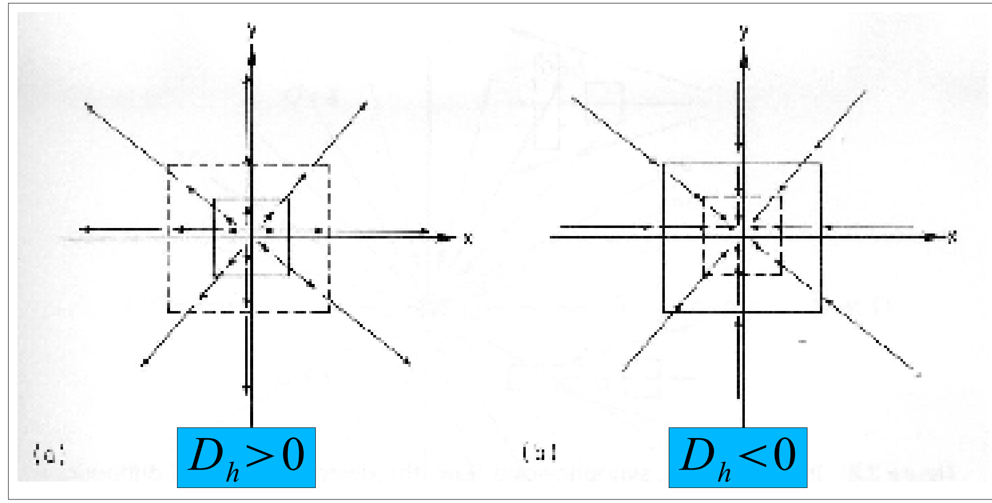
$$D_h = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

$D_h > 0$: Divergenz

$D_h < 0$: Konvergenz

Divergenz : Flächenzuwachs, formtreu

Konvergenz : Flächenverringerung, formtreu

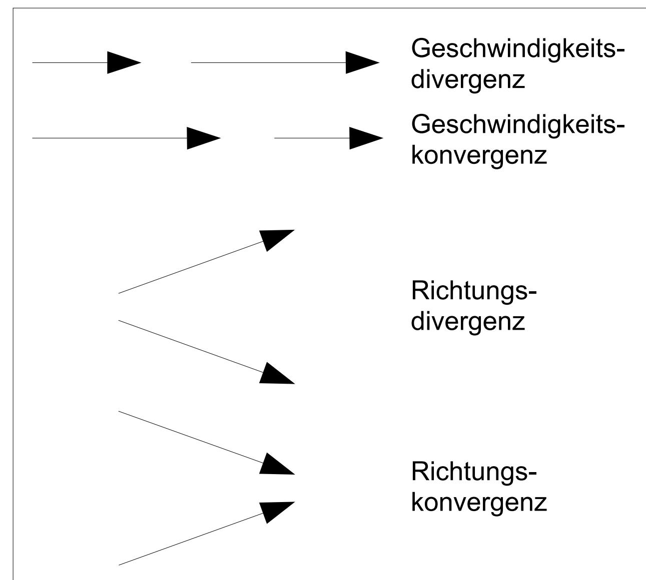


Divergenz in natürlichen Koordinaten:

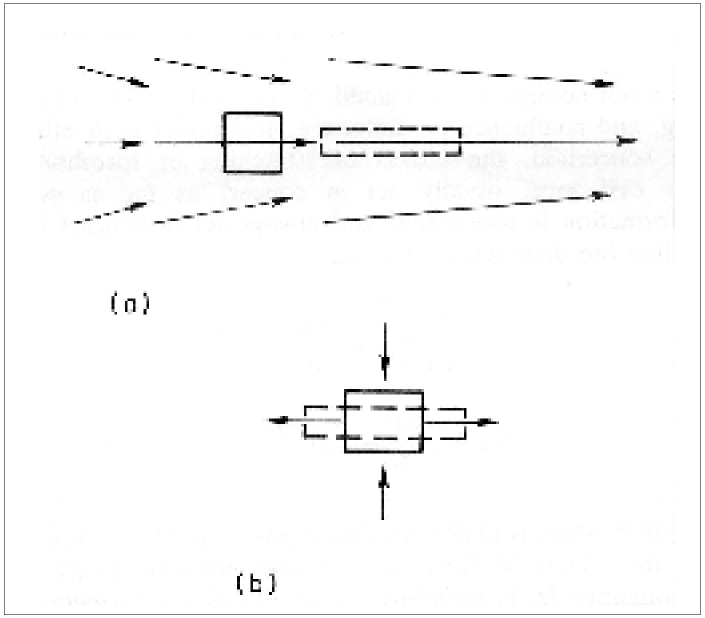
$$D_h = \underbrace{\frac{\partial v_h}{\partial s}}_{Geschwindigkeitsdivergenz} + \underbrace{v_h \frac{\partial \alpha}{\partial n}}_{Richtungsdivergenz}$$

Änderung des Betrags, nicht der Richtung

nur Richtungsänderung des Geschwindigkeitsvektors



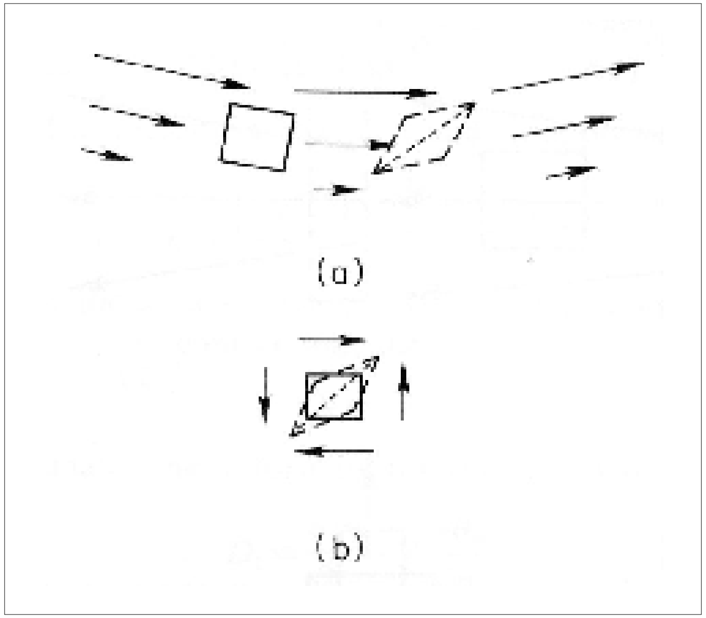
Deformationen



Streckungsdeformation

(a) in Translationsbewegung eingebettet
→ Streckung entlang der Strömung
→ Stauchung normal zur Strömung

(b) ohne Translation



Scherungsdeformation

(a) in Translationsbewegung eingebettet
→ Streckung unter 45° Winkel links der Strömung
→ Stauchung unter 45° Winkel rechts der Strömung

(b) ohne Translation

Jacobi-Operator

Welche Invarianten bestimmen den horizontalen Windvektor-gradienten?

$$\nabla_h \boldsymbol{v}_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Eine kinematische Invariante des horizontalen Windvektor-gradienten ist die Jacobi'sche Funktionaldeterminante $J(v_x,v_y)$:

$$J(v_x, v_y) = \frac{1}{4}\left(D_h{}^2 + \zeta^2 - Def_z{}^2\right)$$

Jacobi-Operator

mit $Def_z{}^2 = Def_{Str}{}^2 + Def_{Sch}{}^2$

$J(v_x,v_y)$ als <u>nichtlineare</u> kinematische Invariante vermittelt zwischen den invarianten kinematischen Größen Divergenz, Vorticity und zusammengesetzter Deformation.

$J(v_x,v_y)$, Def_Z	:	nichtlineare Invarianten
ς , D_h	:	lineare Invarianten

<u>Ergebnis:</u> Der horizontale Windvektorgradient wird durch 3 Invarianten bestimmt. Zwischen den 4 Invarianten ς,D_h,$J(v_x,v_y)$,Def_Z besteht eine nichtlineare Beziehung.

Jacobi-Operator

<u>Im synoptischen Scale</u> ist die Vorticity um eine Größenordnung größer als die Divergenz: $\varsigma / D_h = 10$

Da $D^2_h \ll \varsigma^2$ kann die Divergenz vernachlässigt werden.

Es gilt also folgende Approximation:

$$\boxed{J(v_x, v_y) = \frac{1}{4}\left(\zeta^2 - Def_z^{\ 2}\right)}$$

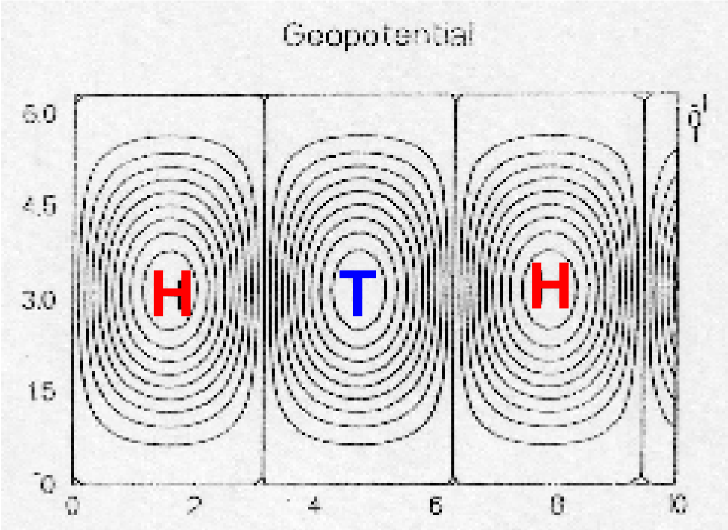
<u>Diskussion:</u>

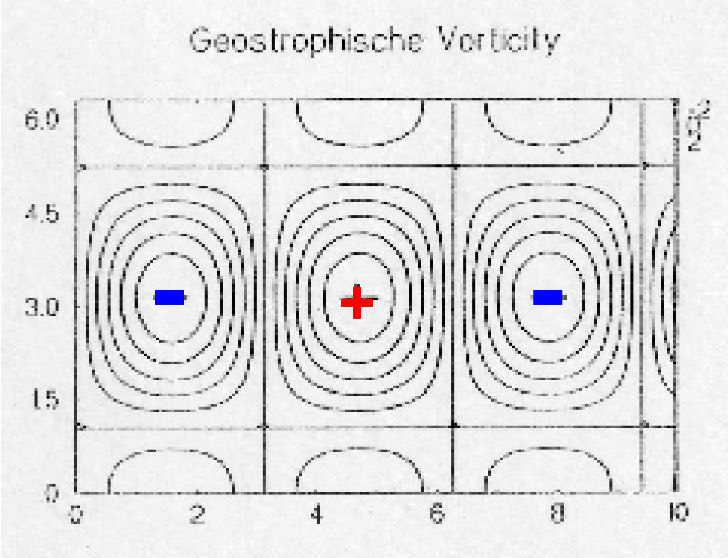
J > 0 : wenn $\zeta^2 > Def_z^{\ 2}$, d.h. wenn die Wirbeleigenschaften überwiegen

J < 0 : wenn $\zeta^2 < Def_z^{\ 2}$, d.h. wenn die Deformationen überwiegen

<u>Beispiele:</u> in den folgenden Beispielen *„abgeschlossene Hoch- und Tiefdruckgebiete“*, *„Frontalzone“* und *„Planetare Welle“* wird die synoptische Approximation des Jacobi-Operators verwendet.

Jacobi-Operator

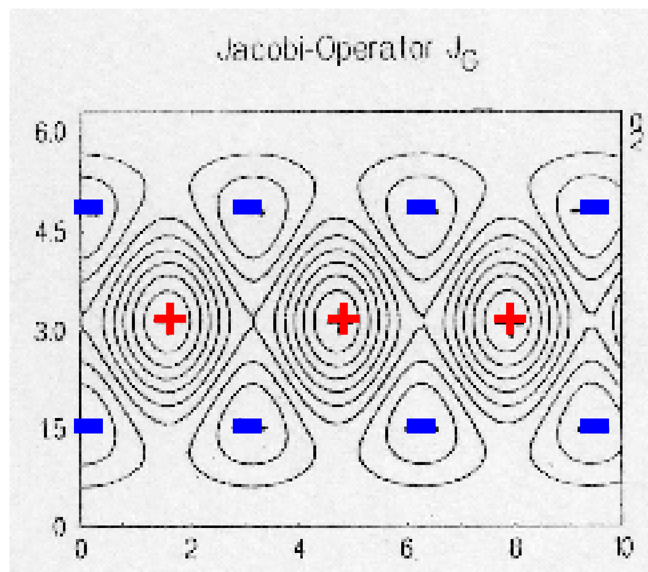




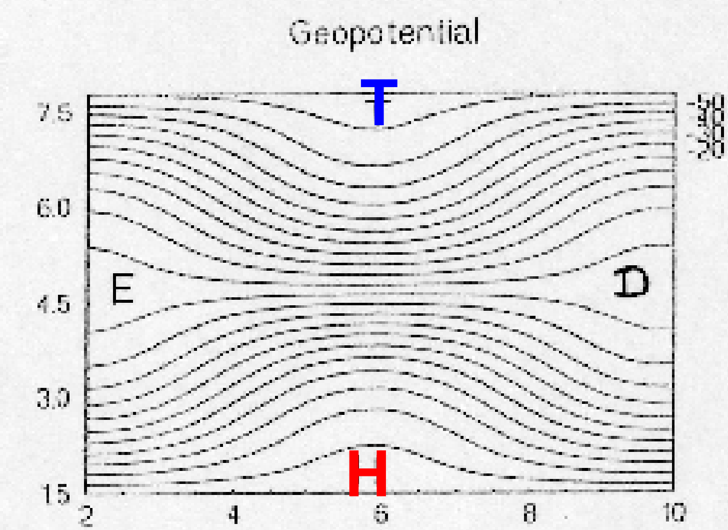
<u>Abgeschlossene Hoch- und Tiefdruckgebiete</u>

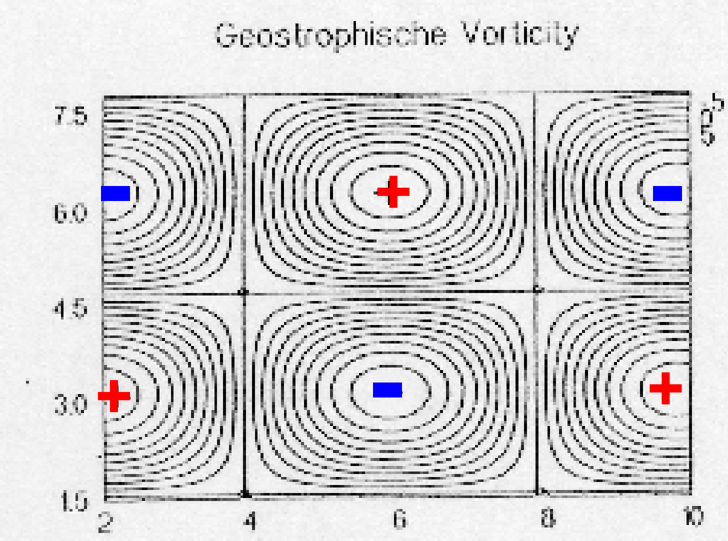
J > 0 : Wirbelbewegungen bzw. Krümmungen und Rotationen überwiegen in den Zentren der Hoch- und Tiefdruck- gebiete.

J < 0 : Deformationen überwiegen in den Randbereichen



Jacobi-Operator

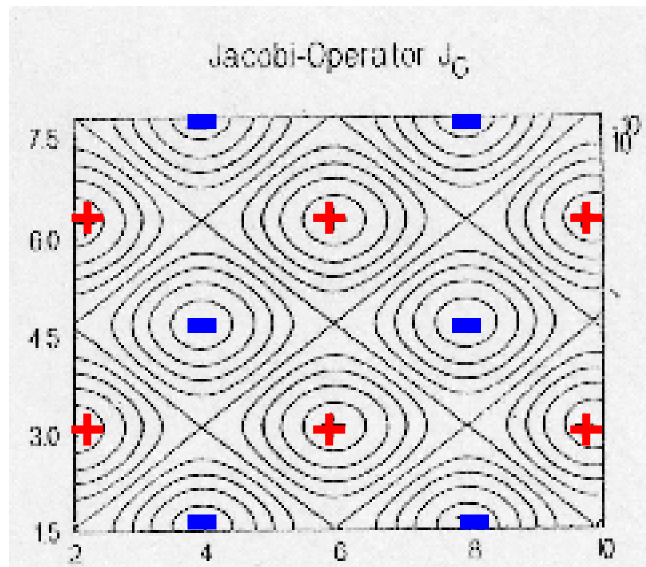




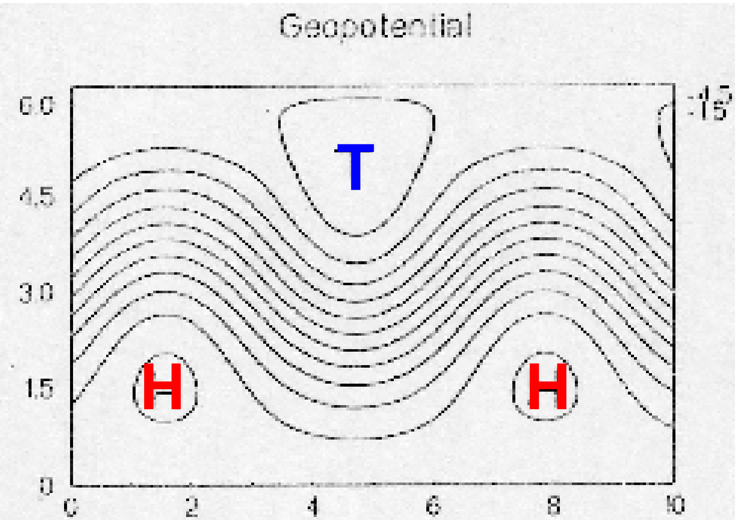
<u>Frontalzone</u>

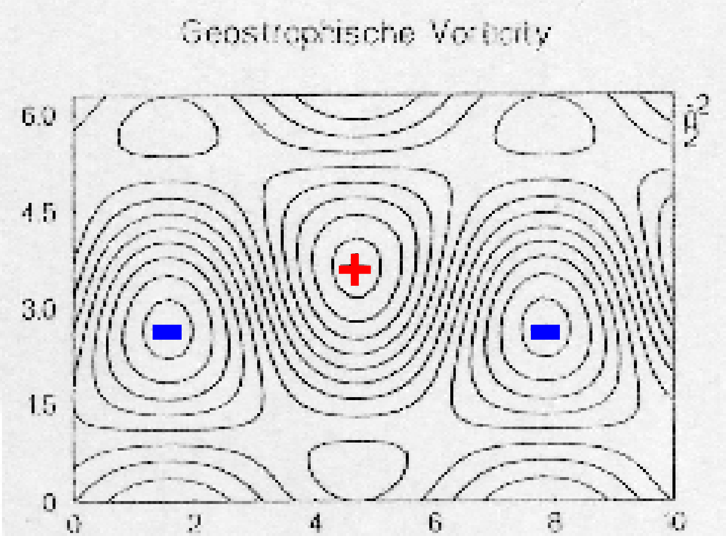
J > 0 : Wirbelbewegungen überwiegen im Zentrum von Hochdruckkeil und Tiefdrucktrog.

J < 0 : Deformationen überwiegen im Einzugsgebiet und Delta einer Frontalzone.
Im Delta einer Frontalzone gibt es die stärksten zyklogenetischen Entwicklungen.



Jacobi-Operator

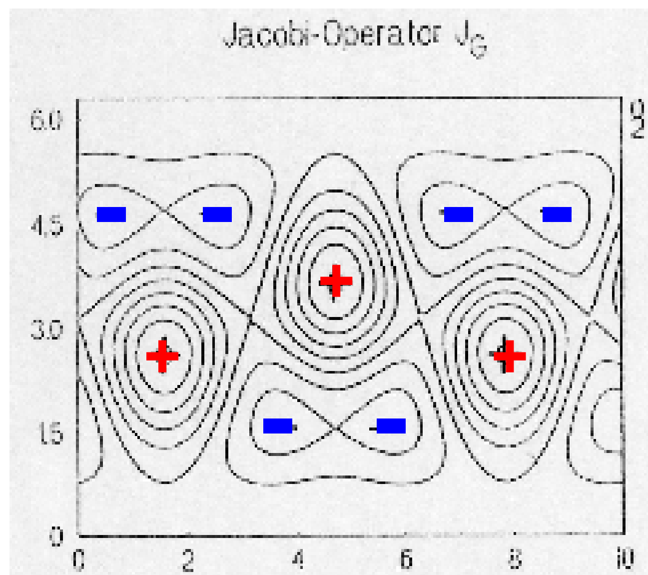




Planetarische Welle

J > 0 : Wirbelbewegungen mit Rotationen überwiegen in den Zentren der stärksten Krümmungen, d.h. in den Hochdruckkeilen und Tiefdrucktrögen.

J < 0 : Deformationen überwiegen im Randbereich.

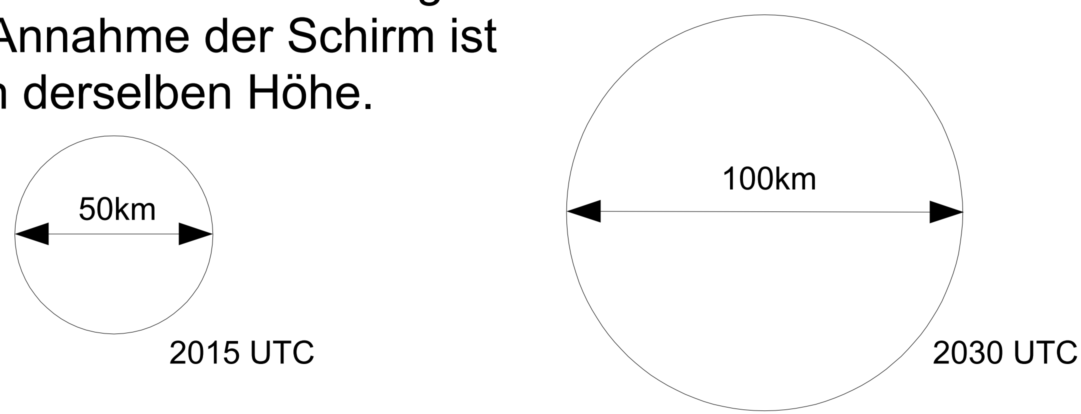


Übungen zum Modul

- Leite aus $J(v_x, v_y) = \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{\partial v_x}{\partial y}$ diese im Modul angegebene Form des Jacobi-Operators her $J(v_x, v_y) = \frac{1}{4}\left(D_h{}^2 + \zeta^2 - Def_z{}^2\right)$

  Hinweis: Benutze die Definitionen für Divergenz, Vorticity, Streckungs- und Dehnungsdeformation.

- Auf dem Satellitenbild entdeckst du den Amboss einer Gewitterwolke. Einige Zeit später hat sich der Amboss vergrößert. Berechne die horizontale Divergenz unter der Annahme der Schirm ist flach und liegt in derselben Höhe.



Zusammenfassung / Merksätze

- Der horizontale Windvektorgradient hat 4 Invarianten, davon sind 3 unabhängig: die Divergenz, die Vorticity und die zusammengesetzte Deformation.

- Die 4. Invariante ist die Jacobi'sche Funktionaldeterminante. Sie ist funktional abhängig von den anderen 3.

- Im synoptischen Scale gibt das Vorzeichen des Jacobi-Operators Auskunft über Rotations- und Deformationseigenschaften der Strömung

  $J>0$: überwiegend Rotationseigenschaft
  $J<0$: überwiegend Deformationseigenschaft