Modul: Kräftegleichgewichte und Gleichgewichtswinde

Lernziel:

Verständnis der elementaren Kräftegleichgewichte in der atmosphärischen Dynamik und der dazugehörigen Gleichgewichtswinde sowie Einführung des natürlichen Koordinatensystems in der Horizontalen

Keywords:
- Geostrophischer Wind
- Zyklostrophischer Wind
- Trägheitsbewegung
- Gradientwind
- Geostrophisch-antitriptischer Wind
- Eulerscher Wind (Beschleunigung)

Horizontale Bewegungsgleichung

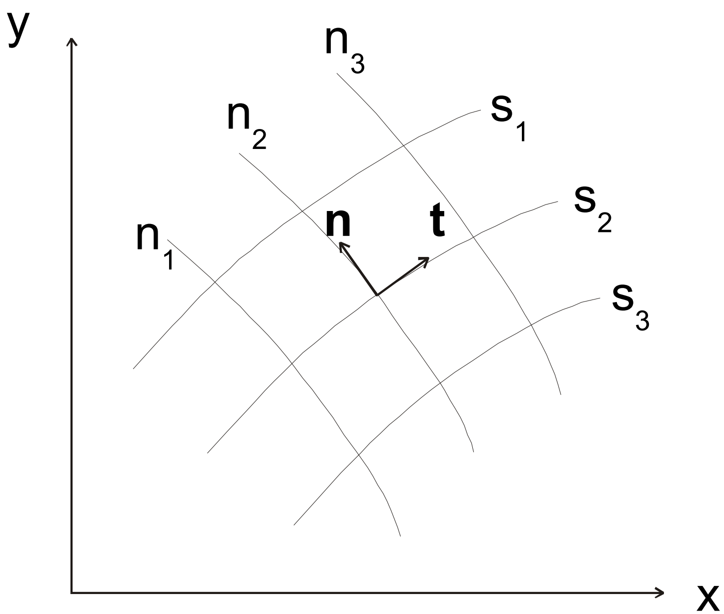
$$\frac{d\mathbf{v}_h}{dt} + f\,\mathbf{k} \times \mathbf{v}_h = -\frac{1}{\rho}\nabla_h p + \frac{1}{\rho}\mathbf{F}_R$$

T C P F

<u>Beteiligte Beschleunigungen</u>

P : Druckgradientbeschleunigung
C : Coriolisbeschleunigung
T : Trägheitsbeschleunigung
F : Reibungsbeschleunigung

Natürliches Koordinatensystem



Eigenschaften:

3. Orthonormal
4. Krummlinig
5. Orts- und zeitabhängig

Der Vektor **t** liegt tangential an der Trajektorie der Luftteilchen, zeigt also in Richtung der Windgeschwindigkeit $\mathbf{v}_h = v_h \mathbf{t}$.

n ist der nach links gerichtete Normalvektor.

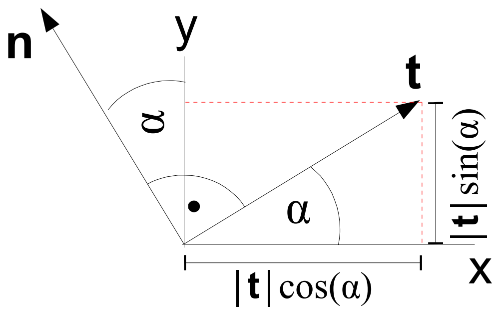
Vergleich: kartesische und natürliche Koordinaten

	Natürliches System	Kartesisches System
Basis-vektoren	t(r,t) : Tangentialvektor n(r,t) : Normalenvektor	i : Einheitsvektor in x-Richtung j : Einheitsvektor in y-Richtung
Koord.-linien	s(r,t) : Stromlinie n(r,t) : Normalenlinie	x-Achse, y-Achse

Natürliches Koordinatensystem

Gesucht ist die Darstellung von **t** und **n** in der Basis (**i**,**j**,**k**):

Der Winkel zwischen **i** und **t** sei α . α ist der Isogonenwinkel. Dann gilt für **t**:



$$\boldsymbol{t} = \cos(\alpha)\,\boldsymbol{i} + \sin(\alpha)\,\boldsymbol{j}$$

n erhält man aus einer Linksdrehung des Vektors **t** um 90°:

$$\boldsymbol{n} = -\sin(\alpha)\,\boldsymbol{i} + \cos(\alpha)\,\boldsymbol{j}$$

Die Krümmung der Trajektorie ist definiert durch den reziproken Krümmungsradius R mit κ = 1/R .

<u>individuelle Zeitableitung von **t** :</u>

$$\frac{d\,\mathbf{t}}{dt} = \frac{\partial \cos(\alpha)}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \sin(\alpha)}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{j} = \left(-\sin(\alpha)\,\boldsymbol{i} + \cos(\alpha)\,\boldsymbol{j}\right)\frac{d\alpha}{dt} = \boldsymbol{n}\frac{d\alpha}{dt}$$

Individuelle Isogonenwinkeländerung:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v_h}{R} = v_h \kappa \begin{Bmatrix} >0 & : & \textit{zyklonal} \\ <0 & : & \textit{antizyklonal} \end{Bmatrix}$$

Bewegungsgleichung in natürlichen Koordinaten

$$\frac{d\,v_h}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\,p}{\partial\,s}$$

Tangentialkomponente / Isotachengleichung

$$\frac{{v_h}^2}{R} + f v_h = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\,p}{\partial\,n}$$

Normalkomponente / Isogonengleichung

Z **C** **P** Beteiligte Beschleunigungen

Beteiligte Beschleunigungen:

P: Druckgradientbeschleunigung
C: Coriolisbeschleunigung
Z: Zentrifugalbeschleunigung

1. Geostrophischer Wind

Der geostrophische Wind beschreibt das Gleichgewicht von Druck- und Corioliskraft:

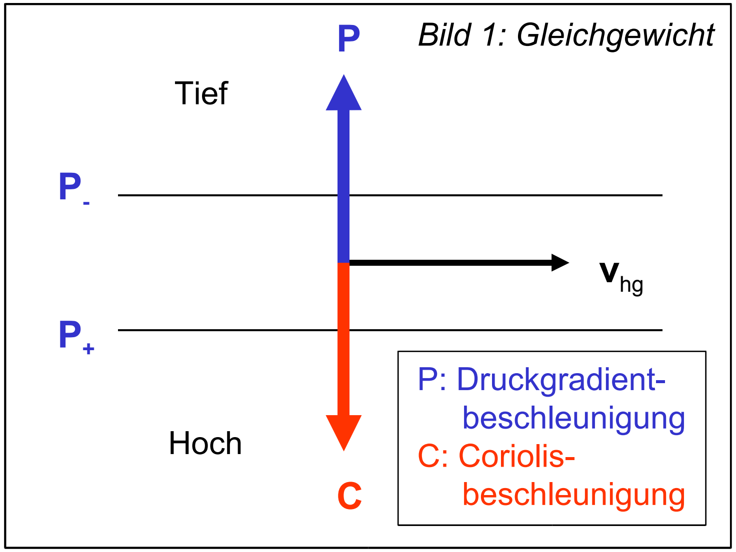


Bild 1: Gleichgewicht

$$f\,\mathbf{k}\times\mathbf{v}_{hg}=-\frac{1}{\rho}\nabla_h p \;\rightarrow\; \mathbf{v}_{hg}=\frac{1}{f\,\rho}\mathbf{k}\times\nabla_h p$$

Betrag in natürlichen Koordinaten:

$$v_{hg}=-\frac{1}{f\,\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

<u>Voraussetzungen:</u>

1. keine Reibung
2. Beschleunigungsfreie Bewegung
3. geradlinige Isobaren

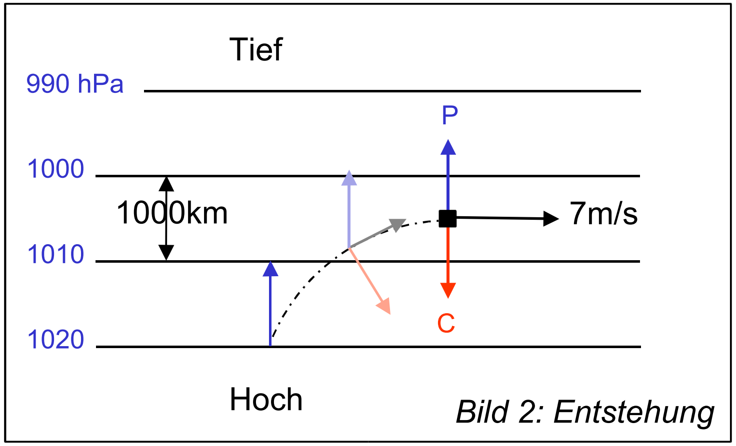


Bild 2: Entstehung

<u>Geometrische Interpretation:</u>

Wind weht parallel zu den Isobaren.

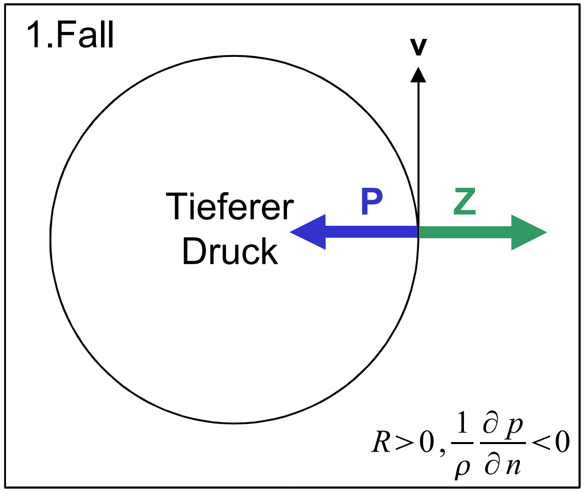
<u>Beispiele:</u>

Großräumige geradlinige Strömungen, Strahlströme

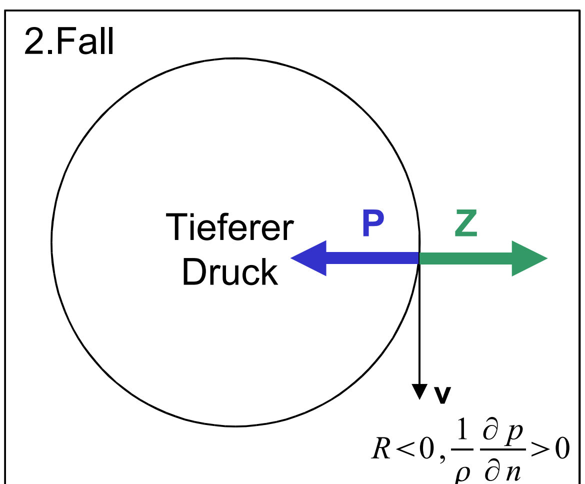
2. Zyklostrophischer Wind

Beim zyklostrophische Wind sind Druckgradient- und Zentrifugalkraft im Gleichgewicht:

$$\frac{v_h^2}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \rightarrow v_h = \left[-R\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\right]^{1/2}$$



P: Druckgradient
Z: Zentrifugalkraft



<u>Voraussetzungen:</u>

1. keine Reibung
2. beschleunigungsfreie Bewegung
3. geringe horizontale Ausdehnung (R klein)

<u>2 Fälle:</u> Die zyklostrophische Strömung kann sowohl im Uhrzeigersinn als auch im Gegen-uhrzeigersinn verlaufen.

Ein Gebiet höheren Luftdrucks kann nicht zyklostrophisch umströmt werden.

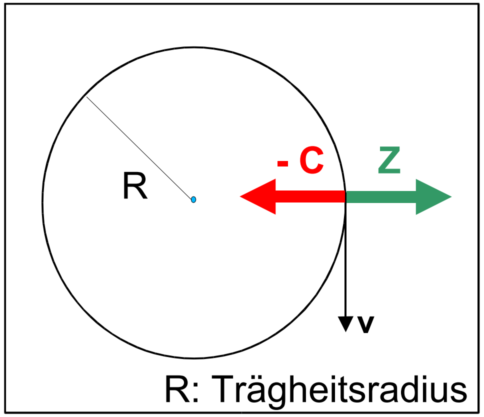
<u>Beispiele:</u> Tornado, Staubteufel, Wasserhose

3. Trägheitsbewegung

Wenn die Druckgradientkraft verschwindet, verschwindet damit auch die Tangential-beschleunigung, und es herrscht Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und Coriolis-kraft.

$$\frac{v_h^2}{R} + f v_h = 0 \;\rightarrow\; R = -\frac{v_h}{f} = -\frac{v_h}{2\omega \sin\phi} < 0$$

Die Trajektorie ist stets antizyklonal gekrümmt.



C: Corioliskraft
Z: Zentrifugalkraft

C und Z resultieren aus der Trägheit der Strömung, daher *Trägheitsbewegung*.

→ Atmosphäre: fast alle Bewegungen beruhen auf Druckgradientkraft

→ Ozean: häufig werden Strömungen durch oberflächennahe Winde angetrieben
→ Schwingung mit Trägheitsperiode

1.Fall: v_h klein → $f \approx$ const. → Kreisbewegung mit der Periode τ

$$\tau = \frac{2\pi |R|}{v_h} = \frac{2\pi}{|f|} = \frac{1/2\, Tag}{|\sin\phi|}$$

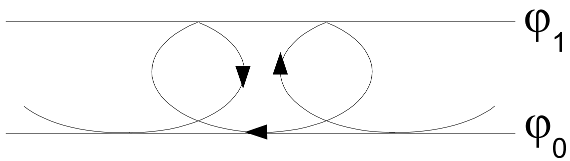
τ ist äquivalent zu der Zeit, die ein Foucault-Pendel braucht, um sich um 180° zu drehen
→ *½ Pendulum-Tag*

3. Trägheitsbewegung

Trajektorie ist antizyklonal gekrümmt!

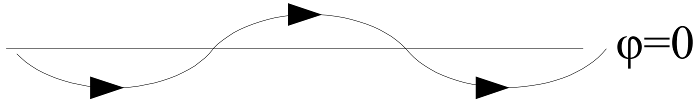
2.Fall: v_h größer $\rightarrow f \neq$ const. $\rightarrow$ keine geschlossene Kreisbewegung

$\rightarrow$ Bewegung mit Schleifen



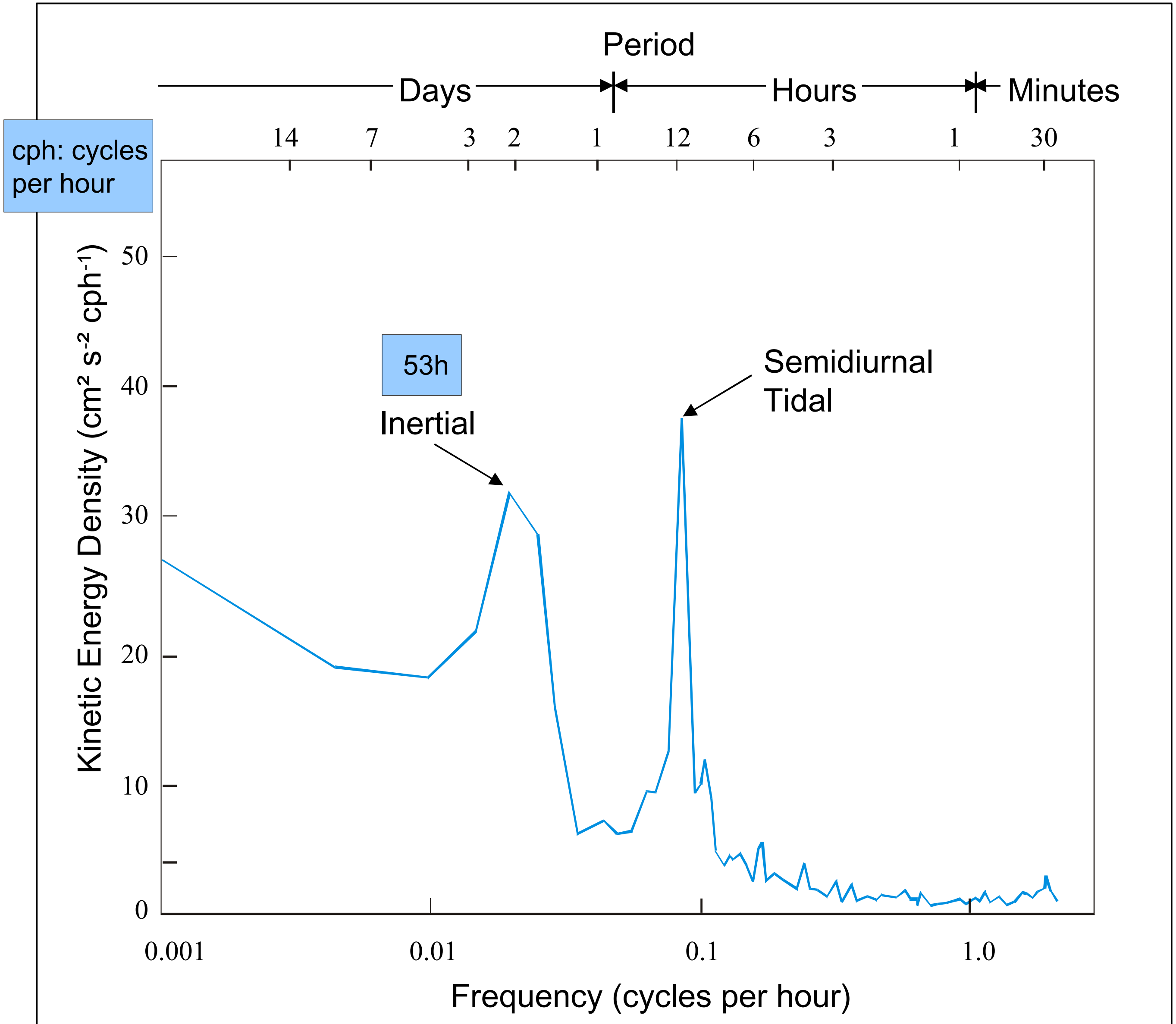
3.Fall: in Äquatornähe $\rightarrow$ Krümmungsradius nimmt zu

$\rightarrow$ antizyklonal beiderseits des Äquators



am Äquator: $f=0$ $\rightarrow R=\infty \rightarrow$ geradlinige Bewegung

<u>Power-Spektrum</u> der kinetischen Energie in 30m Tiefe im Ozean bei Barbados (13°N)



- Die gesamte kin. Energie ist auf Schwingungen verschiedener Periode aufgeteilt.
- Peaks → charakt. Schwingungen
- z.B. 53h : Trägheits-periode in 13°geogr. Breite

4. Gradientwind

Der geostrophisch-zyklostrophische Wind, auch Gradientwind genannt beschreibt das Gleichgewicht von Druckgradientkraft, Zentrifugalkraft und Corioliskraft.

$$v_h = -\frac{fR}{2} \pm \left[\frac{f^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right]^{1/2} \quad \rightarrow \quad v_h = -\frac{fR}{2} \pm \left[\frac{f^2 R^2}{4} + fRv_{hg} \right]^{1/2}$$

<u>Lösungen:</u> 8 mathematische, 4 physikalische, 2 synoptische Lösungen

Zusammenfassung der 8 Lösungen:

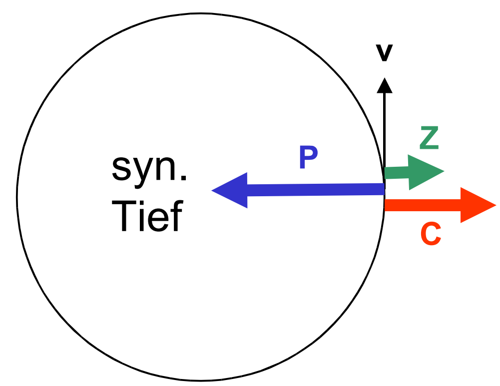
	$R > 0$	$R < 0$
$v_{hg} < 0$	+ [...]$^{1/2}$: unphysikalisch - [...]$^{1/2}$: unphysikalisch	+ [...]$^{1/2}$: antibarische Strömung (anomales Tief) - [...]$^{1/2}$: unphysikalisch
$v_{hg} > 0$	+ [...]$^{1/2}$: zyklonal (synoptisches Tief) - [...]$^{1/2}$: unphysikalisch	+ [...]$^{1/2}$: ($v_h > -fR/2$) antizyklonal (synoptisches Hoch) - [...]$^{1/2}$: ($v_h < -fR/2$) antizyklonal (anomales Hoch)

<u>Hinweis:</u> Hoch und Tief bedeuten Gebiete höheren und Gebiete tieferen Drucks verglichen mit dem Umgebungsdruck

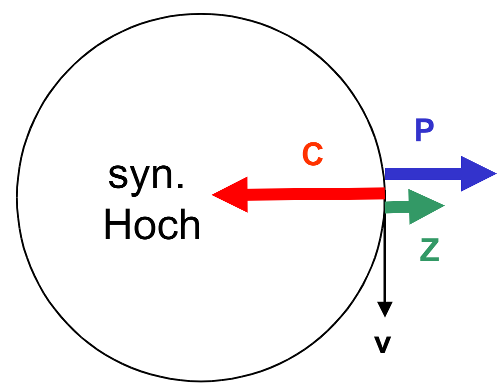
4. Gradientwind

Die synoptischen Lösungen sind großräumige Tief- und Hochdruckgebiete.

Kräftegleichgewicht im Tief:



Kräftegleichgewicht im Hoch:



Eigenschaften der Kräfte:

(1) Die Zentrifugalkraft ist jeweils die kleinste der auftretenden Kräfte.
(2) Corioliskraft und Druckgradientkraft sind einander entgegengesetzt. (barische Strömung)

Vergleich: Gradientwind v_h – geostr. Wind v_{hg}

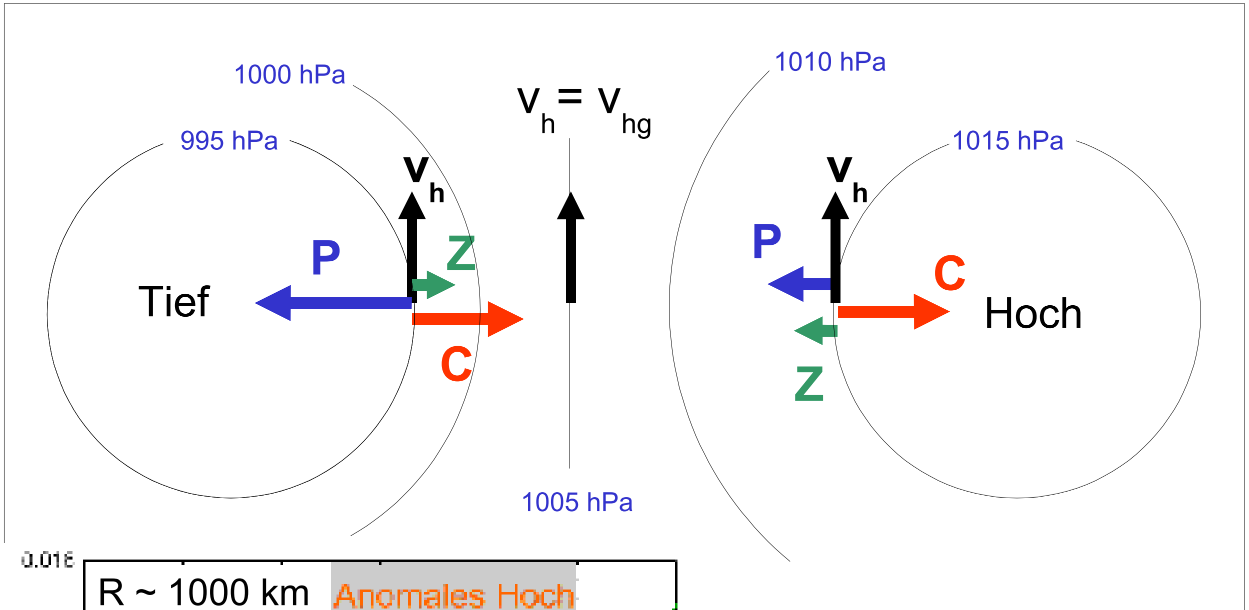
$$\frac{v_h^2}{R} + f v_h = f v_{hg} \rightarrow \frac{v_{hg}}{v_h} = 1 + \underbrace{\frac{v_h}{fR}}_{\textit{Rossbyzahl}}$$

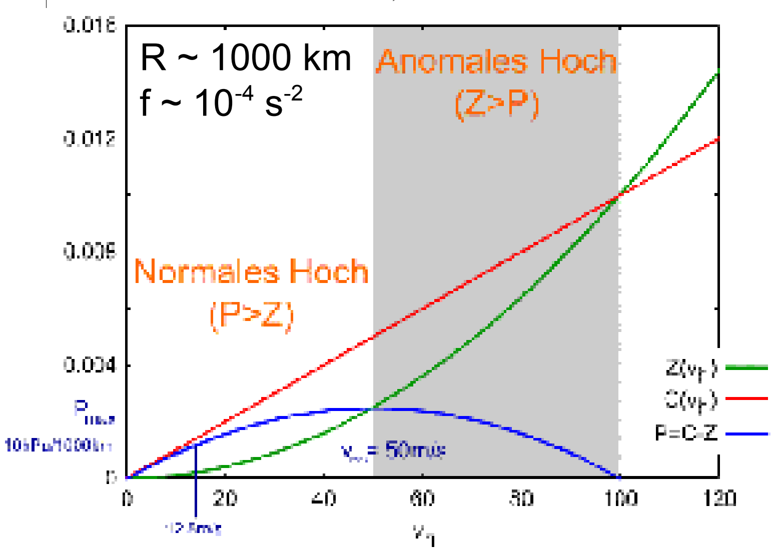
$v_{hg} > v_h$: bei zyklonaler Krümmung
$v_{hg} < v_h$: bei antizyklonaler Krümmung

Der Unterschied zwischen Gradientwind und geostr. Wind beträgt in den mittleren Breiten ungefähr 10-20%.

4. Gradientwind

<u>Fallbeispiel</u> mit folgende Annahmen: $R_{Hoch} = R_{Tief}$, v_h=const. → C=const. , |Z|=const.





<u>Im realen Fall</u> ist die Windgeschwindigkeit im Tief größer als im Hoch:

$v_{h,Tief} > v_{h,Hoch}$

Der Druckgradient ist im Tief also noch größer als hier eingezeichnet (bzw. im Hoch geringer).

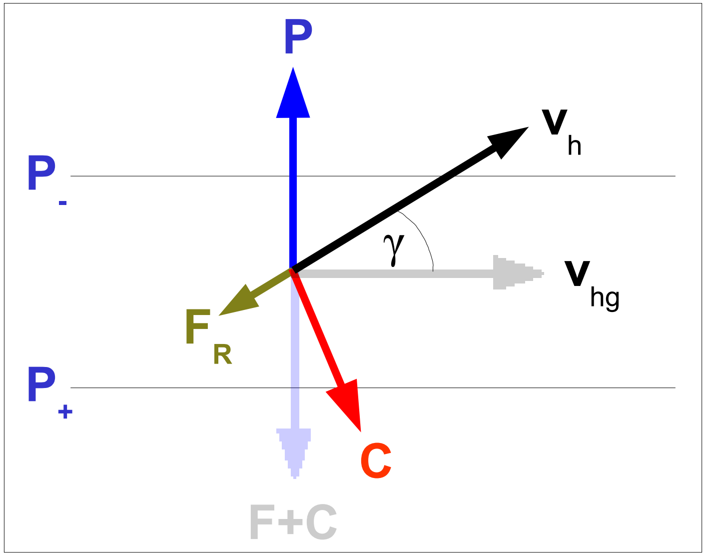
Es gibt eine maximal mögliche Geschwindigkeit, mit der ein Hoch umströmt werden kann. Maximale Grenze für ein normales Hoch unter den links getroffenen Annahmen liegt bei v_{max}=50m/s (P=25hPa/1000km).

Im realistischeren Fall von P~10hPa/1000km beträgt der Gradientwind: v_h~12.5m/s.

5. Geostrophisch-antitriptischer Wind

Corioliskraft und Reibung balanzieren die Druckgradientkraft. Der geostrophisch-anti-triptische Wind tritt in der atmosphärischen Grenzschicht auf.

$$f\,\mathbf{k}\times(\mathbf{v}_h-\mathbf{v}_{hg})=\frac{1}{\rho}\mathbf{F}_R$$



Voraussetzung: Beschleunigungsfreie Bewegung

Geometrisch: Der Wind schneidet die Isobaren unter dem Winkel γ .

Der Wind weht immer in Richtung des tieferen Druckes, d.h. aus dem Hoch hinaus und in das Tief hinein.

Ablenkungswinkel – Beipiele:
- über Meer: 0°-15°
- über Land: 20°- 40°
- Ekman-Spirale: 45° (theoretisch berechneter maximaler Ablenkungswinkel)

Mehr zur Grenzschicht (Ekman-Spirale) gibt es im Modul - Reibung

6. Euler-Wind

In Äquatornähe wird der Coriolisparameter $f = 2\omega \sin\varphi$ sehr klein da $\varphi \approx 0$. Die Corioliskraft verschwindet und es herrscht kein geostrophisches Gleichgewicht mehr. Es gilt:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}_h}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla_h p}$$

Der Wind wird also in Äquatornähe direkt vom Hoch zum Tief hin beschleunigt, d.h. dass Druckgegensätze rasch ausgeglichen werden bzw. dass sich extreme Gegensätze gar nicht erst aufbauen können.

Aus diesem Grund können keine tropischen Zyklonen und Hurricanes in Äquatornähe zwischen 4°S und 4°N entstehen.

Übungen zum Modul

- Wende die stationäre Bewegungsgleichung für den zyklostrophischen Wind in natürlichen Koordinaten auf einen voll entwickelten kreisförmigen Tornado mit dem Radius R=100m an. Die Bodentemperatur beträgt überall T=27°C, der Bodendruck in der Umgebung des Tornados sei p=1000hPa. Die Luft im Tornado rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

  Wie groß ist der Bodendruck im Zentrum des Tornados p_T?

- Zeige, dass bei einer normalen Antizyklone der Gradientwind gegen den geostrophischen Wind geht, wenn gleichzeitig der Druckgradient gegen Null geht.

Zusammenfassung / Merksätze

- Die horizontale Bewegungsgleichung in natürlichen Koordinaten teilt sich in eine Tangential- (Isogonengleichung) und in eine Normalkomponente (Isotachengleichung) auf.
- Der Gradientwind ist die realistische Approximation der Strömung der freien Atmosphäre in den mittleren Breiten
- In Modellen wird das geostrophische Gleichgewicht angenommen. Diese Approximation ist relativ gut. Der geostrophische Wind weicht vom Gradientwind um maximal 10% ab.
- Der geostrophische Wind weht in der freien Atmosphäre stets isobarenparallel.
- Der zyklostrophische Wind tritt nur in der kleinräumigen Skala auf (z.B. Tornados), d.h. das zyklostrophische Gleichgewicht ist großräumig synoptisch nicht relevant.

Toolbox Komplexe 1