*THEMA: Tensor-Rechnung*

5. *(4.5 Pkt)* Zur Zeit $t = t_0$ habe das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ die Form

$$\mathbf{v}\,(x, y, z, t_0) = \alpha\mathbf{r}(x, y, z) + \beta\mathbf{k} \times \mathbf{r}(x, y, z)$$

($\alpha$ und $\beta$ sind Konstanten, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ sei der Ortsvektor).

Man berechne zu diesem Geschwindigkeitsfeld die folgenden kinematischen Größen:

a) Die lokale Dyade $\mathbb{A} = \nabla\mathbf{v}$,

b) die transponierte lokale Dyade $\mathbb{A}^T = \mathbf{v}\nabla$,

c) den symmetrischen Anteil der lokalen Dyade $\mathbb{A}^S$,

d) den antisymmetrischen Anteil der lokalen Dyade $\mathbb{A}^{AS}$,

e) den 1. Skalar (1. Invariante) der lokalen Dyade $\mathbb{A}_1 = \mathrm{spur}\mathbb{A}$,

f) den axialen Vektor der lokalen Dyade $\mathbb{A}_x$,

g) die zugeordnete (adjunkte) lokale Dyade $\mathbb{A}^{ad}$,

h) den 1. Skalar der zugeordneten lokalen Dyade ${\mathbb{A}^{ad}}_1 = spur\mathbb{A}^{ad}$ und

i) den axialen Vektor der zugeordneten lokalen Dyade ${\mathbb{A}^{ad}}_x$.

6. *(4 Pkt)* In der Vorlesung wurden folgende Identitäten aufgezeigt:

$$\mathbb{M}_s \cdot \mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} \qquad (1)$$

$$(\mathbb{M}_{orth} \cdot \mathbf{a})^2 = \mathbf{a}^2 \qquad (2)$$

In Gleichung (1) ist $\mathbb{M}_s$ ein symmetrischer Tensor, der eine Streckung beschreibt, und in Gleichung (2) ist $\mathbb{M}_{orth}$ ein orthogonaler Tensor, der eine Drehung vollführt. Bestimme den Tensor $\mathbb{M}$, der die folgende Gleichung erfüllt und führe den Beweis:

$$\mathbb{M} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{m} \times \mathbf{a}.$$

Der Vektor $\mathbf{m}$ ist dabei der axiale Vektor des Tensors $\mathbb{M}$. Welche Eigenschaft weist $\mathbb{M}$ auf?

7. *(3 Pkt)* Es sei $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ der Ortsvektor und der Vektor $\omega$ die konstante Winkelgeschwindigkeit der Erde. Stelle die lineare homogene Vektorfunktion

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$$

in der Form

$$\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{r}$$

dar, d.h. bestimme den Tensor 2. Stufe $\mathbf{\Omega}$. Berechne mit einer der beiden Formeln die Führungsgeschwindigkeit der Erde in Berlin ($\phi = 53°$) und auf dem Äquator.

*Abgabe am 31. Oktober*